ESTREMO SUPERIORE: è quel valore minimo che non viene mai superato dagli elementi dell'insieme A. es. $A = \{0,5 ; 0,98 ; 0,99 ; 0,\overline{9} ; 0,7\}$ l'estremo superiore è 1.

Oppure $1 - \frac{1}{n}$ con $n > 1$ ⟶ l'estremo superiore è 1.

ESTREMO INFERIORE: è quel valore massimo al di sotto del quale nessun elemento dell'insieme A va. ES: $\{0, 0,0\overline{1}, -0,\overline{9}, -1\}$ ⟶ l'estremo inf. è -1 che in questo caso è compreso nell'insieme, ma può benissimo essere escluso.

MASSIMO: l'elemento più grande dell'insieme $A = \{1,3,5,7\}$ 7 è il max.

MINIMO: l'elemento più piccolo di A.

ES. $]0;1]$ → non c'è minimo, perchè ci si avvicina sempre più a zero indefinitamente
c'è estremo inf. ed è 0
c'è estremo sup. ed è 1
c'è massimo ed è 1.

MASTER COPY
Tel. 388/9837745

SUCCESSIONI

• x_1, x_2, x_3 → 3 è indice

X_m tende a L se $\forall \varepsilon$, $\exists$ indice m_0 t.c. $\forall m \geq m_0$ si ha $|X_m - L| < \varepsilon$

m e $m_0 \in N$; ES. trovare gli m t.c. $\frac{1}{m} \leq \varepsilon$ ⟶ $m \geq \frac{1}{\varepsilon}$

La successione $x_m = m$ non converge a nessun numero reale L perchè cresce sempre di più; oppure se n è un altro caso di successione senza limite poichè il seno oscilla, e lo fa anche a $+\infty$.

$-x_m \to +\infty$ se $\forall N$ (cioè n molto grande) $\exists$ indice m_0 t.c. $\forall m > m_0$ $x_m > N$.

Così come se n anche $(-1)^n$ non ha limite perchè oscilla sempre.

• L'estremo superiore esiste sempre in R [se l'insieme è limitato superiormente] mentre può non esistere in Q. ES: $]-\infty ; \sqrt{2}[$.

L'ESTREMO SUPERIORE SI INDICA CON $SUP(A)$
L'ESTREMO INFERIORE SI INDICA CON $INF(A)$

$\sqrt{2}$ non è razionale $\quad \sqrt{2} \neq \frac{m}{n}$ → intero / n → naturale

DIMOSTRAZIONE

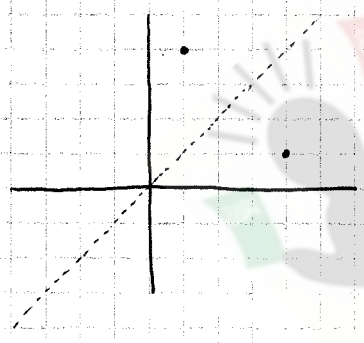
• Ipo: m, n non entrambi pari (se lo fossero si semplificherebbero fino a diventare entrambi dispari, oppure uno pari e l'altro dispari).

PER ASSURDO $\quad \sqrt{2} = \frac{m}{n} \quad 2 = \frac{m^2}{n^2} \quad m^2 = 2n^2 \quad m^2$ è pari → m pari

poichè m è pari può essere scritto come $2k$ $\quad \boxed{m = 2k}$

allora $(2k)^2 = 2n^2 \quad 2k^2 = n^2 \quad n^2$ è pari allora n è pari;
si ha che m, n sono pari e ciò contraddice l'ipotesi ASSURDO.

• Dato $A(1;2)$ $a=1$ $b=2$ scambiare le coordinate di A significa mettere b al posto di a e viceversa ottenendo $A'=(2;1)$ che è il simmetrico di A rispetto alla bisettrice 1°-3° quadrante $y=x$



$A=(4;1) \quad A'=(1;4)$ simmetrici rispetto a $y=x$

TEOREMA SUI LIMITI E SULLE FUNZIONI CONTINUE

1. $f: A \to R \quad x_0 \in A \quad f$ è continua in x_0 se $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \gamma > 0$ t.c.
se $x \in A$ se $|x - x_0| < \gamma \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

2. $f: \mathbb{R} \to R$ si dice che $f(x) \to l$ per $x \to x_0$ se $\exists \gamma$: se $|x - x_0| \leq \gamma$
allora $|f(x) - l| \leq \varepsilon$
↳ $l = f(x_0)$

MASTER COPY
Tel. 388/9837745

PROPRIETÀ DELLE FUNZIONI CONTINUE

Ipotesi: f, g continue in $[a;b]$ | Se f è continua, $|f|$ è continua.

1. $f+g$ continua in $[a;b]$
2. $f \cdot g$ continua in $[a;b]$

TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO

Se f è continua in x_0, e $f(x_0) \neq 0$ allora $\exists\, \gamma > 0$ t.c. nell'intervallo $]x_0-\gamma, x_0+\gamma[$ $f(x)$ ha segno co'

DIM. (CASO $f(x_0)>0$) $\quad \varepsilon = f(x_0)/2 > 0$ perchè $f(x_0)>0$

$\exists\, \gamma > 0$ t.c. in $]x_0-\gamma, x_0+\gamma[$ $\quad |f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$

$-\varepsilon < f(x) - f(x_0) < \varepsilon \qquad f(x_0)-\varepsilon < f(x) < f(x_0)+\varepsilon$

ma $\varepsilon = f(x_0)/2 \qquad f(x_0)-\frac{f(x_0)}{2} < f(x) < f(x_0)+\frac{f(x_0)}{2}$

$\frac{f(x_0)}{2} < f(x) < \frac{3f(x_0)}{2}$ $\quad$ ma $\frac{f(x_0)}{2} > 0$ allora $f(x)$ è a segno costante nell'intervallo $]x_0-\gamma; x_0+\gamma[$ come volevasi dimostrare.

PROP.

- Se f è continua in $[a;b]$ allora $\frac{1}{f}$ risulta continua su $[a;b] \cap \{x : f(x) \neq 0\}$

Se f è continua in x_0 e $f(x_0) \neq 0$ allora $\frac{1}{f}$ è continua in x_0.

Se f, g sono continue in $[a;b]$ allora $\frac{f}{g}$ è continua in $[a;b] \cap \{x : g(x) \neq 0\}$

- Se f è continua e invertibile, definita nell'intervallo I, allora la sua inversa è continua ... * le funzioni elementari (sen, log, arcsen, exp) sono invertibili nel dominio.

Se f, g continue $\rightarrow f \circ g$ continua [f e g funzioni elementari]

RIEPILOGO

f, g continue $\Rightarrow$ $f+g$ continua

f, g continue $\Rightarrow$ fg continua

f continua $\Rightarrow$ $\frac{1}{f}$ continua $(f \neq 0)$

f, g continue $\Rightarrow$ $\frac{f}{g}$ continua $(g \neq 0)$

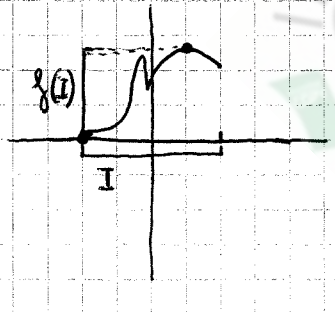
f, g continue $\Rightarrow$ $g \circ f$ continua

f continua $\Rightarrow$ f^{-1} continua

- Tutte le funzioni elementari sono continue in ogni punto del dominio.

Teorema dei valori intermedi

Se I intervallo e $f: I \to \mathbb{R}$ è una funzione continua allora l'immagine $f(I)$ è un intervallo



OSS. Se f è continua non ci sono "salti" nè in orizzontale nè in verticale; così come l'intervallo esiste orizzontalmente, esisterà anche verticalmente.

TEOREMA DELL'ESISTENZA DEGLI ZERI Ipotesi principale: f continua

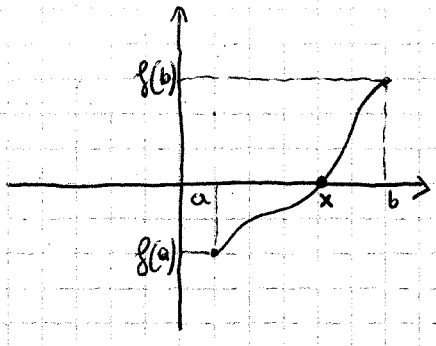
Ip. $f(a) \cdot f(b) < 0$ $\quad f(a) < 0$ $\quad f(b) > 0$ $\quad f: [a;b] \to \mathbb{R}$

Tesi: $\exists\, x \in [a;b]$ t.c. $f(x) = 0$ (aperto) oss. x è almeno 1.

DIM. PER ASSURDO $f(x) \neq 0$ (FACOLTATIVA)

Consideriamo l'insieme E degli x t.c. $x \in [a;b]$ e $f(x) < 0$

Sia $x_0 = \sup(E) \leq b$



1. x_0 è un maggiorante di E cioè è maggiore o uguale di tutti gli elementi di E
$x_0 \geq E$

2. Se $y_0 < x_0 \Rightarrow y_0$ non è maggiorante di E.

Se $f(x)$ non assume valore 0 nell'intervallo $[a;b]$ ~~chiuso~~ aperto allora $f(x_0) \neq 0$; quindi può essere positivo o negativo.

1. $f(x_0) < 0$ ~~una siccome $f(x_0)$ è minore di 0 e $f(b) > 0$~~ per ipotesi $x_0 < b$; ma se $f(x_0) < 0$ allora per il teorema della permanenza del segno $\exists\, \gamma$ t.c. nell'intervallo $]x_0 ; x_0 + \gamma[$ $f(x)$ continua ad avere segno costante... in questo caso il segno continuerebbe ad essere negativo anche per un $x > x_0$ e questo è assurdo perché abbiamo supposto che x_0 fosse il più grande numero a godere di quella proprietà, cioè abbiamo supposto che x_0 fosse maggiore o uguale di tutti gli x per cui $f(x) < 0$ ma qui è spuntato un $x > x_0$ t.c. $f(x) < 0$ e tutto ciò è ASSURDO, contraddice la proprietà 1 dell'estremo superiore.

2. $f(x_0) > 0$ per ipotesi, poiché $x_0 \in$ all'intervallo ~~aperto~~ chiuso $[a;b]$
se è > 0 sarà per forza maggiore di a perché $f(a) < 0$

Ma se $f(x_0) > 0$ anche $f(x_0 - \gamma)$ [con γ piccolo a piacere] sarà maggiore di 0.

In questo caso per il teorema della permanenza del segno si avrebbero 2 maggioranti, ma per la 2ª proprietà dei maggioranti ciò è ASSURDO

Infatti se x_0 è maggiorante e $y_0 < x_0 \Rightarrow y_0$ non può essere maggiorante, mentre in questo assurdo caso y_0 sarebbe pure maggiorante.

OSS. $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ tuttavia $x : f(x) = 0$ appartiene all'intervallo aperto $]a;b[$